Μέθοδοι Μετασχηματισμού του Ελλειψοειδούς εκ Περιστροφής σε Σφαιρική Επιφάνεια

Αθανάσιος Παλληκάρης

Σχολή Ναυτικών Δοκίμων, Εργαστήριο Ναυτιλίας και Θαλλασίων Επιστημών, Λεωφόρος Χατζηκυριακού, Χατζηκυριάκειο, Πειραιάς, ΤΚ 18539, palikaris@snd.edu.gr

Περίληψη. Στην παρούσα μελέτη παρουσιάζονται και αξιολογούνται μέθοδοι μετασχηματισμού του ελλειψοειδούς εκ περιστροφής σε σφαιρική επιφάνεια. Παρουσιάζονται συναρτήσεις για τον ευθύ μετασχηματισμό «ελλειψοειδές δε σφαίρα» και για τον αντίστροφο μετασχηματισμό «σφαίρα σε ελλειψοειδές» για τις επόμενες τέσσερις περιπτώσεις: μετασχηματισμός σε «σφαίρα συμμορφίας» χωρίς γωνιακές παραμορφώσεις, σε «ισοδύναμη σφαίρα» χωρίς επιφανειακές παραμορφώσεις, σε «ισαπέχουσα στη διεύθυνση των μεσημβρινών σφαίρα» και σε «ισαπέχουσα στη διεύθυνση ενός παραλλήλου πλάτους σφαίρα». Η αξιολόγηση των μεθόδων μετασχηματισμού βασίστηκε στον υπολογισμό και στην ανάλυση της κατανομής των γραμμικών, επιφανειακών και γωνιακών παραμορφώσεων. Τα αποτελέσματα της αξιολόγησης μπορούν να αξιοποιηθούν στην επιλογή της καταλληλότερης μεθόδου για την χαρτογραφική απεικόνιση ολόκληρης, ή τμήματος της επιφάνειας της γης σύμφωνα με τις κατά περίπτωση επιθυμητές ιδιότητες, όπως μηδενισμός των γωνιακών ή των επιφανειακών παραμορφώσεων, ανάλογα με τον σκοπό για τον οποίο προορίζεται η χαρτογραφική απεικόνιση.

Λέξεις-Κλειδιά: χαρτογραφικές προβολές, παραμορφώσεις, διπλή απεικόνιση ελλειψοειδούς

Methods of Transforming the Ellipsoid of Revolution onto the Surface of a Sphere

Athanasios Pallikaris

Hellenic Naval Academy, Sea Sciences and Navigation Laboratory, Terma Hatzikyriakou Ave, Pireas Greece, TK 18539, palikaris@snd.edu.gr

Abstract. Methods of transformation of the surface of the ellipsoid of revolution onto the surface of a sphere are presented and evaluated. The methods can be used for the double projection of the ellipsoid onto a plane (ellipsoid to sphere, then sphere to plane) by the employment of map projections for which map transformation functions exist only for the sphere. Direct and inverse map transformation functions are presented and evaluated for four cases: transformation onto a “conformal sphere” without angle distortion, onto an “equivalent sphere” without area distortion, onto an “equidistant along the meridians sphere” and onto an “equidistant along a certain parallel sphere”. The assessment of the transformations has been conducted by numerical tests based on the calculation and analysis of the linear, angular and area distortions for each transformation.

Keywords: map projections, map distortion, double projection, ellipsoid

ΕΙΣΑΓΩΓΗ - ΜΕΘΟΔΟΙ ΑΠΕΙΚΟΝΙΣΗΣ ΤΗΣ ΕΠΙΦΑΝΕΙΑΣ ΤΟΥ ΕΛΛΕΙΨΟΕΙΔΟΥΣ ΕΚ ΠΕΡΙΣΤΡΟΦΗΣ ΣΕ ΕΠΙΠΕΔΟ

Η απεικόνιση της επιφάνειας του Ελλειψοειδούς εκ Περιστροφής (ΕΕΠ) σε επίπεδο πραγματοποιείται συνήθως με χρήση των συναρτήσεων f_1 και f_2 των (1) και (2), με τις οποίες πραγματοποιείται ο μετασχηματισμός των ελλειπτικών γεωδαιτικών συντεταγμένων (φ_i, λ_i) των σημείων της επιφάνειας του ΕΕΠ στις καρτεσιανές συντεταγμένες (x_i, y_i) του επιπέδου απεικόνισης (Σχ. 1). Ο μετασχηματισμός αυτός $[(\varphi_i,\lambda_i) \rightarrow (x_i,y_i)]$ αποτελεί το ευθύ πρόβλημα της αναλυτικής χαρτογραφίας, το οποίο αποτελεί βασικό εργαλείο της επιστημονικής έρευνας τόσο για την ανάλυση και αξιολόγηση των γνωστών χαρτογραφικών απεικονίσεων όσο για τη δημιουργία νέων χαρτογραφικών απεικονίσεων (χαρτογραφικών προβολών) ολόκληρης, ή μέρους της επιφάνειας της γης.

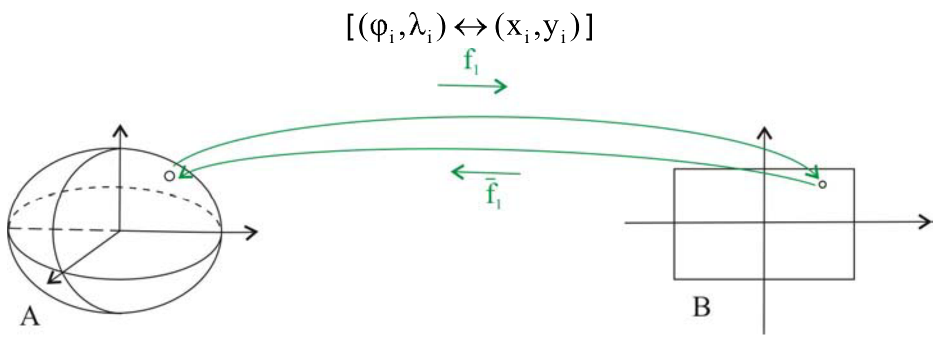
$$x_i = f_1\,(\varphi_i,\lambda_i) \tag{1}$$

$$y_i = f_2\,(\varphi_i,\lambda_i) \tag{2}$$

Ο αντίστροφος μετασχηματισμός των συντεταγμένων (x_i, y_i), των σημείων του επιπέδου απεικόνισης στις ελλειπτικές γεωδαιτικές συντεταγμένες (φ_i, λ_i) των αντίστοιχων σημείων της επιφάνειας του ΕΕΠ $[(x_i,y_i) \rightarrow (\varphi_i,\lambda_i)]$ αποτελεί το αντίστροφο πρόβλημα της αναλυτικής χαρτογραφίας, στο οποίο χρησιμοποιούνται οι συναρτήσεις του αντίστροφου μετασχηματισμού g_1 και g_2 των (3) και (4).

$$\varphi_i = g_1\,(x_i\,,y_i) \tag{3}$$

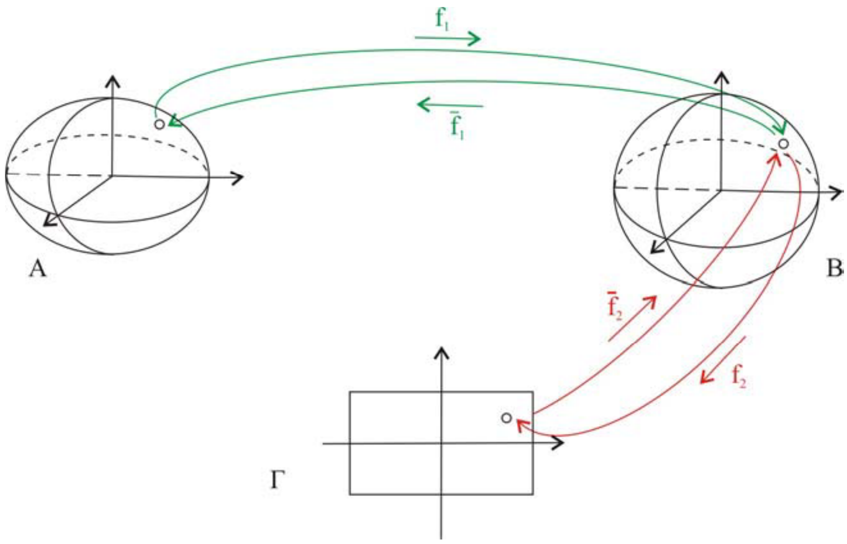
$$\lambda_i = g_2(x_i\,,y_i) \tag{4}$$



Σχήμα 1. Μετασχηματισμός της επιφάνειας του ΕΕΠ σε επίπεδο

Σε ορισμένες χαρτογραφικές απεικονίσεις συνηθίζεται να χρησιμοποιούνται οι απλούστερες συναρτήσεις χαρτογραφικού μετασχηματισμού της σφαίρας. Η απλοποίηση αυτή έχει χρησιμοποιηθεί εκτενώς σε παραδοσιακούς έντυπους γεωγραφικούς άτλαντες για την απεικόνιση γεωγραφικών περιοχών πολύ μεγάλης έκτασης, οι οποίες καλύπτουν ένα ημισφαίριο ή και ολόκληρη την υδρόγειο σε πολύ μικρές κλίμακες, για τις οποίες δεν παρατηρούνται αξιόλογες διαφορές με τις αντίστοιχες απεικονίσεις του ΕΕΠ. Για τις σύγχρονες εφαρμογές σε περιβάλλον Συστήματος Γεωγραφικών Πληροφοριών (GIS), στις οποίες λόγω της δυνατότητας δυναμικής αλλαγής της κλίμακας απεικόνισης απαιτείται μεγαλύτερη ακρίβεια απεικόνισης, ο μετασχηματισμός της επιφάνειας του ΕΕΠ σε επίπεδο είναι δυνατό να υλοποιηθεί με την εκτέλεση ενός ενδιάμεσου μετασχηματισμού της επιφάνειας του ΕΕΠ σε μια βοηθητική σφαίρα και στη συνέχεια με την απεικόνιση της σφαίρας σε επίπεδο (Σχ. 2) [Παλληκάρης 2010].

ISSN: 1791-4469 Copyright © 2012 Hellenic Naval Academy



Σχήμα 2. Μετασχηματισμός της επιφάνειας του ΕΕΠ σε επίπεδο με ενδιάμεση απεικόνιση σε βοηθητική σφαίρα

Κατά τον ενδιάμεσο μετασχηματισμό της επιφάνειας του ΕΕΠ σε σφαίρα και ανάλογα με τις απαιτήσεις της εξεταζόμενης εφαρμογής, είναι δυνατό να εξασφαλιστεί η διατήρηση κάποιας βασικής ιδιότητας, όπως: μηδενισμός των γωνιακών παραμορφώσεων, μηδενισμός των επιφανειακών (εμβαδικών) παραμορφώσεων, μηδενισμός των γραμμικών παραμορφώσεων σε μία καθορισμένη διεύθυνση. Με τον τρόπο αυτό είναι δυνατό να προκύψουν διάφορες ενδιάμεσες σφαίρες με διαφορετικά χαρακτηριστικά εκάστη, όπως:

- Σφαίρα συμμορφίας, η οποία προκύπτει από το μετασχηματισμός της επιφάνειας του ελλειψοειδούς χωρίς γωνιακές παραμορφώσεις.
- Ισοδύναμη σφαίρα, η οποία προκύπτει από το μετασχηματισμός της επιφάνειας του ελλειψοειδούς χωρίς επιφανειακές (εμβαδικές) παραμορφώσεις, δηλαδή το εμβαδόν της επιφάνειας απεικόνισης (ισοδύναμης σφαίρας) είναι ‘ίσο με το εμβαδόν της επιφάνειας αναφοράς (ελλειψοειδούς)
- Ισαπέχουσα στη διεύθυνση των μεσημβρινών σφαίρα, η οποία προκύπτει από το μετασχηματισμός της επιφάνειας του ελλειψοειδούς χωρίς γραμμικές παραμορφώσεις στη διεύθυνση των μεσημβρινών
- Ισαπέχουσα στη διεύθυνση των παραλλήλων σφαίρα, η οποία προκύπτει από το μετασχηματισμός της επιφάνειας του ελλειψοειδούς χωρίς γραμμικές παραμορφώσεις στη διεύθυνση των παραλλήλων

Στις προαναφερθείσες μεθόδους μετασχηματισμού της επιφάνειας του ΕΕΠ σε σφαίρα, η αντιστοιχία των ελλειπτικών γεωδαιτικών συντεταγμένων (φ, λ) ενός σημείου της επιφάνειας του ΕΕΠ και των σφαιρικών συντεταγμένων (φ΄, λ΄) του σημείου αυτού στη σφαίρα, δίνεται από τις (4) και (5). Ο αντίστροφος μετασχηματισμός των γεωγραφικών συντεταγμένων (φ΄, λ΄) ενός σημείου της επιφάνειας της βοηθητικής σφαίρας στις αντίστοιχες γεωδαιτικές συντεταγμένες (φ, λ) στην επιφάνεια του ΕΕΠ πραγματοποιείται με τις (5) και (6).

$$\varphi' = \varphi - A_2 \sin 2\varphi - A_4 \sin 4\varphi - A_6 \sin 6\varphi - A_8 \sin 8\varphi \tag{4}$$

$$\lambda = \lambda' \tag{5}$$

$$\varphi = \varphi' + B_2 \sin 2\varphi' + B_4 \sin 4\varphi' + B_6 \sin 6\varphi' + B_8 \sin 8\varphi' \tag{6}$$

όπου:

φ, λ: είναι το γεωδαιτικό πλάτος και το γεωδαιτικό μήκος ενός σημείου στην επιφάνεια του ΕΕΠ

φ΄, λ΄: είναι το (σφαιρικό) γεωγραφικό πλάτος και το (σφαιρικό) γεωγραφικό μήκος ενός σημείου στην επιφάνεια της σφαίρας

Οι τιμές των συντελεστών A_2, A_4, A_6, A_8, B_2, B_4, B_6 και B_8 εξαρτώνται από την χρησιμοποιούμενη βοηθητική σφαίρα (σφαίρα συμμορφίας, ισοδύναμη σφαίρα, ισαπέχουσα σφαίρα).

ΠΑΡΑΜΟΡΦΩΣΕΙΣ ΜΕΤΑΣΧΗΜΑΤΙΣΜΟΥ ΕΠΙΦΑΝΕΙΩΝ

Βασικές έννοιες και ορισμοί

Σύμφωνα με τις βασικές αρχές της θεωρίας των παραμορφώσεων των επιφανειών της διαφορικής γεωμετρίας, όπως αυτές εφαρμόζοντα στην αναλυτική χαρτογραφία[1], κατά τον μετασχηματισμό μιας επιφάνειας αναφοράς (π.χ., του ΕΕΠ) σε μία επιφάνεια απεικόνισης δημιουργούνται γραμμικές, επιφανειακές και γωνιακές παραμορφώσεις. Για την αξιολόγηση των παραμορφώσεων αυτών χρησιμοποιούνται καταρχήν οι επόμενες παράμετροι, οι οποίες παρουσιάζονται σε όλα τα κλασσικά συγγράμματα της αναλυτικής χαρτογραφίας[2].

Η **τοπική κλίμακα γραμμικής παραμόρφωσης μ** (local linear scale), ή απλά γραμμική παραμόρφωση κατά μήκος μιας διεύθυνσης σε ένα σημείο της επιφάνειας απεικόνισης είναι το κλάσμα του μήκους μιας στοιχειώδους γραμμής ds στο επίπεδο απεικόνισης προς το μήκος ds' της αντίστοιχης στοιχειώδους γραμμής στην επιφάνεια αναφοράς (ΕΕΠ ή σφαίρα). Για την ποσοτική μέτρηση της γραμμικής παραμόρφωσης συνήθως χρησιμοποιείται ο συντελεστής γραμμικής κλίμακας. Ο **συντελεστής γραμμικής κλίμακας** (linear scale factor) κατά μήκος μιας διεύθυνσης σε ένα σημείο της επιφάνειας απεικόνισης είναι το κλάσμα της τοπικής κλίμακας γραμμικής παραμόρφωσης προς την κύρια κλίμακα. Η **κύρια κλίμακα μ_o** (principal scale), γνωστή και ως συντελεστής απεικόνισης (representation factor) είναι η κλίμακα του σμικρυμένου γεωμετρικού μοντέλου της γης (ΕΕΠ ή σφαίρας) και ορίζεται ως το κλάσμα των αντίστοιχων ακτίνων του ισημερινού (για το σμικρυμένο και για το αρχικό μοντέλο).

Για την αποτελεσματικότερη ανάλυση των παραμορφώσεων, ο συντελεστής γραμμικής κλίμακας προσδιορίζεται θεωρώντας ότι η τιμή της κύριας κλίμακας είναι ίση με ένα. Με τον τρόπο αυτό η τιμή του συντελεστή γραμμικής κλίμακας είναι ίση με την τοπική κλίμακα γραμμικής παραμόρφωσης. Ο ***συντελεστής γραμμικής κλίμακας στη διεύθυνση του μεσημβρινού*** συμβολίζεται με **h** και ο ***συντελεστής γραμμικής κλίμακας στη διεύθυνση του παραλλήλου*** με **k**. Πολλές φορές οι συντελεστές αυτοί χρησιμοποιούνται με τη μορφή του σφάλματος γραμμικής κλίμακας, το οποίο υπολογίζεται από τις διαφορές: (h-1) και (k-1).

Η **τοπική κλίμακα επιφανειακής παραμόρφωσης** (local area scale), ή απλά επιφανειακή παραμόρφωση σε ένα σημείο του επιπέδου απεικόνισης είναι το κλάσμα του εμβαδού dE ενός στοιχειώδους τετραπλεύρου στο επίπεδο απεικόνισης προς το εμβαδό dE' του αντίστοιχου στοιχειώδους τετραπλεύρου στην επιφάνεια αναφοράς (ΕΕΠ ή σφαίρα). Για την ποσοτική μέτρηση της επιφανειακής παραμόρφωσης συνήθως χρησιμοποιείται ο συντελεστής επιφανειακής κλίμακας.

Ο **συντελεστής επιφανειακής κλίμακας p** (area scale factor) είναι το κλάσμα της τοπικής κλίμακας επιφανειακής παραμόρφωσης προς την κλίμακα επιφανειακής παραμόρφωσης στη **κεντρική γραμμή**, ή το **κεντρικό σημείο** της απεικόνισης. Μία γραμμή/ένα σημείο ονομάζεται

[1] (Richardus and Adler 1972), (Pearson 1990), (Bugayevskiy and Snyder 1995), (Yang. Snyder and Tobler 2000), (Grafarend and Krumm 2006).

[2] (Maling, 1973), (Snyder 1987), (Νάκος 2006).

κεντρική/ό, όταν οι γραμμικές, οι επιφανειακές και οι γωνιακές παραμορφώσεις στη γραμμή αυτή/(στο σημείο αυτό) έχουν τις ελάχιστες τιμές.

Πολλές φορές ο συντελεστής επιφανειακής κλίμακας χρησιμοποιείται με τη μορφή του σφάλματος επιφανειακής κλίμακας το οποίο υπολογίζεται από τη διαφορά: (p-1).

Η γωνιακή παραμόρφωση, ορίζεται αποτελεσματικότερα με την αναφορά στις βασικές αρχές του θεωρήματος του Tissot και σε παραμέτρους της έλλειψης παραμόρφωσης. Σύμφωνα με το θεώρημα του Tissot (Richardus and Adler 1973):

- Κάθε στοιχειώδης κύκλος στην επιφάνεια της σφαίρας (ή του ΕΕΠ) απεικονίζεται στο επίπεδο ως έλλειψη γνωστή ως έλλειψη παραμόρφωσης, ή **δείκτρια Tissot** (Σχ. 3).
- Σε κάθε σημείο της σφαίρας (ή του ΕΕΠ) υπάρχουν δύο διευθύνσεις που τέμνονται με γωνία 90° οι οποίες απεικονίζονται στο επίπεδο με γραμμές που τέμνονται επίσης με γωνία 90°. Οι διευθύνεις αυτές λέγονται **κύριες διευθύνσεις**.
- Οι κύριες διευθύνσεις, ανάλογα με τη χρησιμοποιούμενη χαρτογραφική απεικόνιση, δεν αντιστοιχούν απαραίτητα στις διευθύνσεις του μεσημβρινού και του παραλλήλου.
- Η μέγιστη και η ελάχιστη τοπική κλίμακα γραμμικής παραμόρφωσης σε ένα σημείο, εμφανίζονται στις κύριες διευθύνσεις του μεγάλου και μικρού ημιάξονα της έλλειψης παραμόρφωσης αντιστοίχως.
- Όταν οι μεσημβρινοί και οι παράλληλοι στην επιφάνια απεικόνισης σχηματίζουν γωνία 90°, η τοπική κλίμακα γραμμικής παραμόρφωσης στη διεύθυνση του μεσημβρινού είναι ίση με τη μέγιστη τοπική κλίμακα γραμμικής παραμόρφωσης a και η τοπική κλίμακα γραμμικής παραμόρφωσης στη διεύθυνση του παραλλήλου είναι ίση με την ελάχιστη τοπική κλίμακα γραμμικής παραμόρφωσης b.

Γωνιακή παραμόρφωση ω, κατά μήκος μιας διεύθυνσης σε ένα σημείο του επιπέδου απεικόνισης είναι η διαφορά μεταξύ των γωνιών u και u', [ω = u - u'] οι οποίες ορίζονται ως εξής:

α.) Η γωνία u (Σχ. 3.α), αντιστοιχεί στη γωνία μεταξύ μιας τυχαίας διεύθυνσης X και της κύριας διεύθυνσης I της μέγιστης γραμμικής παραμόρφωσης στην επιφάνεια αναφοράς (ΕΕΠ, ή σφαίρα).

β.) Η γωνία u' (Σχ. 3.β), αντιστοιχεί στη γωνία μεταξύ της απεικόνισης X' της τυχαίας διεύθυνσης (γραμμής) και της απεικόνισης της κύριας διεύθυνσης της μέγιστης γραμμικής παραμόρφωσης I'' στην επιφάνεια απεικόνισης (στο επίπεδο).

Εξισώσεις παραμορφώσεων

Κατά την απεικόνιση μιας τυχαίας επιφάνειας αναφοράς, τα σημεία της οποίας προσδιορίζονται με τις παραμέτρους (φ, λ), οι οποίες δεν αναφέρονται απαραίτητα στο γεωγραφικό πλάτος και στο γεωγραφικό μήκος, σε μία επιφάνεια απεικόνισης (όχι κατ' ανάγκη σε επίπεδο), η γενική σχέση υπολογισμού της γραμμικής παραμόρφωσης μ σε οποιαδήποτε διεύθυνση ενός σημείου στην επιφάνεια απεικόνισης είναι:

$$\mu = \sqrt{\frac{E' d\varphi^2 + 2F' d\varphi\, d\lambda + G' d\lambda^2}{E d\varphi^2 + 2F\, d\varphi\, d\lambda + G d\lambda^2}} \tag{7}$$

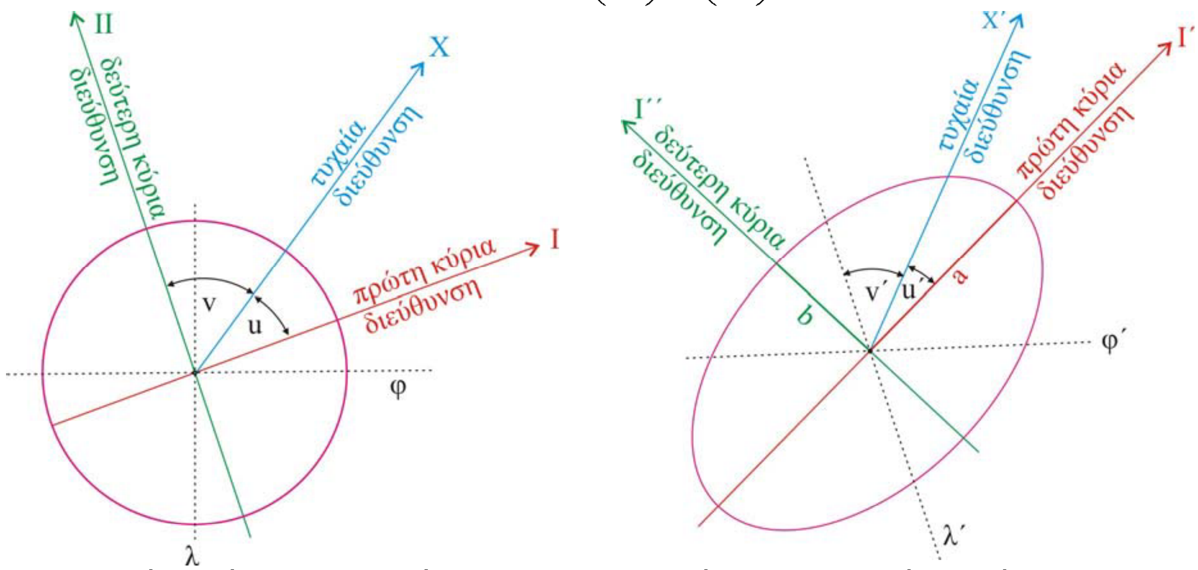
Όπου:

- οι παράμετροι E΄, F΄, G΄ είναι τα βασικά θεμελιώδη μεγέθη πρώτης τάξης του Gauss για κάθε σημείο της επιφάνειας απεικόνισης που δίνονται από τις σχέσεις (8) έως (10) [Πολυράκης 2008].
- οι παράμετροι E, F, G είναι τα αντίστοιχα βασικά θεμελιώδη μεγέθη πρώτης τάξης για την επιφάνεια αναφοράς (datum surface).

$$E' = \left(\frac{\partial x}{\partial \varphi}\right)^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial \varphi}\right)^2 \quad (8)$$

$$F' = \left(\frac{\partial x}{\partial \varphi}\right)\left(\frac{\partial y}{\partial \lambda}\right) + \left(\frac{\partial y}{\partial \varphi}\right)\left(\frac{\partial y}{\partial \lambda}\right) \quad (9)$$

$$G' = \left(\frac{\partial x}{\partial \lambda}\right)^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial \lambda}\right)^2 \quad (10)$$



Ένας στοιχειώδης κύκλος στην επιφάνεια αναφοράς, θεωρείται ότι είναι επίπεδο σχήμα

α. Επιφάνεια αναφοράς (σφαίρα ή ΕΕΠ)

Η απεικόνιση του στοιχειώδους κύκλου στην επιφάνεια απεικόνισης είναι έλλειψη

β. Επιφάνεια απεικόνισης (Σφαίρα, ή επίπεδο χαρτογραφικής απεικόνισης)

Σχήμα 3: Έλλειψη παραμόρφωσης

Στην κλασσική περίπτωση χρησιμοποίησης των χαρτογραφικών απεικονίσεων για την απευθείας απεικόνιση της επιφάνειας του ΕΕΠ σε επίπεδο (Σχ. 1), η επιφάνεια αναφοράς είναι η επιφάνεια του ΕΕΠ, η επιφάνεια απεικόνισης είναι το επίπεδο. Κατά το μετασχηματισμό της επιφάνειας του ΕΕΠ σε σφαιρική επιφάνεια (Σχ. 2), η επιφάνεια αναφοράς είναι η επιφάνεια του ΕΕΠ και η επιφάνεια απεικόνισης είναι η επιφάνεια της χρησιμοποιούμενης βοηθητικής σφαίρας.

Για την επιφάνεια του ΕΕΠ οι τιμές των μεγεθών E, F, G δίνονται από τις (11), (12) και 13).

$$E = R_M{}^2 = \frac{a^2(1-e^2)^2}{(1-e^2\sin^2\varphi)^3} \quad (11)$$

$$F = 0 \quad (12)$$

$$G = R_N{}^2\cos^2\varphi = \frac{a^2}{1-e^2\sin^2\varphi}\cos^2\varphi \quad (13)$$

Όπου:

R_M και R_N είναι οι ακτίνες καμπυλότητας ενός σημείου στη επιφάνεια του ΕΕΠ στις διευθύνσεις του μεσημβρινού και της πρώτης καθέτου αντιστοίχως.

Από τη γενική σχέση (7) με αντικατάσταση των τιμών των μεγεθών E, F και G σύμφωνα με τις (11), (12) και (13), προκύπτει η (14) για τον υπολογισμό της τοπικής γραμμικής παραμόρφωσης μ σε ένα σημείο του επιπέδου απεικόνισης οποιασδήποτε χαρτογραφικής απεικόνισης σε μία τυχαία διεύθυνση α .

$$\mu^2 = \frac{E' d\varphi^2 + 2F' d\varphi\, d\lambda + G' d\lambda^2}{R_M^2 d\varphi^2 + R_P^2 d\lambda^2} =$$

$$\mu^2 = \frac{E'}{R_M^2}\cos^2\alpha + \frac{F'}{R_M R_P}\sin 2\alpha + \frac{G'}{R_P^2}\sin^2\alpha \qquad (14)$$

Από τη (14) που δίνει την τιμή της γραμμικής παραμόρφωσης μ σε μία διεύθυνση α , προκύπτουν οι (15) και (16) για τον υπολογισμό της γραμμικής παραμόρφωσης h στη διεύθυνση του μεσημβρινού (α =0°) και για τον υπολογισμό της τοπικής γραμμικής παραμόρφωσης k στη διεύθυνση του παραλλήλου (α =90°).

$$h = \frac{\sqrt{E'}}{R_M} \qquad (15)$$

$$k = \frac{\sqrt{G'}}{R_P} \qquad (16)$$

Για τον υπολογισμό της μέγιστης τοπικής κλίμακας γραμμικής παραμόρφωσης a και της ελάχιστης τοπικής κλίμακας γραμμικής παραμόρφωσης b, χρησιμοποιούνται οι (17) και (18).

$$a = \frac{1}{2}(\sqrt{h^2 + 2hk\cos\varepsilon + k^2} + \sqrt{h^2 - 2hk\cos\varepsilon + k^2} \qquad (17)$$

$$b = \frac{1}{2}(\sqrt{h^2 + 2hk\cos\varepsilon + k^2} - \sqrt{h^2 - 2hk\cos\varepsilon + k^2} \qquad (18)$$

Όπου:

ε : είναι η συμπληρωματική γωνία της γωνίας τομής του μεσημβρινού και παραλλήλου i $(\varepsilon = 90^\circ - i)$, που δίνεται από τη (19).

$$\varepsilon = \arctan(-\frac{F'}{H'}) \qquad (19)$$

Όπου:

H είναι η διακρίνουσα της επιφάνειας αναφοράς σε ένα σημείο του επιπέδου απεικόνισης που δίνεται από την (20).

$$H = \sqrt{E'G' - F'^2} \qquad (20)$$

Ο υπολογισμός της τοπικής κλίμακας επιφανειακής παραμόρφωσης p, πραγματοποιείται με τη (21).

$$p = hk\cos\varepsilon = ab \qquad (21)$$

Η μέγιστη γωνιακή παραμόρφωση ω σε κάθε σημείο του επιπέδου απεικόνισης δίνεται από την (22).

$$\omega = \frac{|h-k|}{h+k} \qquad (22)$$

Από την ανωτέρω συνοπτική παρουσίαση προκύπτει ότι για τον υπολογισμό των γραμμικών, των επιφανειακών και των γωνιακών παραμορφώσεων με τις (14) έως (22) απαιτείται ο προσδιορισμός των μεγεθών:

- E, F, G και H για την επιφάνεια αναφοράς.
- E΄, F΄, G΄ και H΄ σε ένα σημείο της επιφάνειας απεικόνισης.

Για τον προσδιορισμό των μεγεθών E, F, H και G στα σημεία της επιφάνειας της σφαίρας χρησιμοποιούνται οι (11) έως (13) με τιμή της πρώτης εκκεντρότητας e ίση με μηδέν (e=0) και αντικατάσταση της παραμέτρου a με την τιμή της ακτίνας R της σφαίρας (συνήθως χρησιμοποιείται σφαίρα μοναδιαίας ακτίνας, R=1). Στη συνέχεια προσδιορίζονται τα μεγέθη E΄, F΄, H΄ και G΄ με τις (8) έως (10) από τα οποία προκύπτουν τύποι προσδιορισμού των γραμμικών, επιφανειακών και γωνιακών παραμορφώσεων.

ΜΕΤΑΣΧΗΜΑΤΙΣΜΟΣ ΤΗΣ ΕΠΙΦΑΝΕΙΑΣ ΤΟΥ ΕΛΛΕΙΨΟΕΙΔΟΥΣ ΣΕ ΣΥΜΜΟΡΦΗ ΣΦΑΙΡΑ

Οι συναρτήσεις του μετασχηματισμού της επιφάνειας του ΕΕΠ σε σύμμορφη σφαίρα, προκύπτουν από την εφαρμογή της συνθήκης συμμορφίας (h = k) με την οποία εξασφαλίζεται ότι κατά τον μετασχηματισμό δεν δημιουργούνται γωνιακές παραμορφώσεις (Bugayevskiy and Snyder 1995). Ανάλογα με τα επιθυμητά χαρακτηριστικά της χρησιμοποιουμένης σύμμορφης σφαίρας, οι (4) και (6) λαμβάνουν διαφορετικές τιμές. Οι κυριότερες μέθοδοι μετασχηματισμού της επιφάνειας του ΕΕΠ σε σφαίρα συμμορφίας είναι:

- Ο μετασχηματισμός με μηδενισμό των γραμμικών παραμορφώσεων στον ισημερινό που προτάθηκε αρχικά από τον Mollweide το έτος 1807,
- ο μετασχηματισμός με μηδενισμό των γραμμικών παραμορφώσεων στο βασικό παράλληλο που προτάθηκε αρχικά από τον Gauss το έτος 1822 και
- ο μετασχηματισμός με μηδενισμό των γραμμικών παραμορφώσεων στον κεντρικό μεσημβρινό που προτάθηκε αρχικά από τον Gauss το έτος 1844.

Στο μετασχηματισμό της επιφάνειας του ΕΕΠ σε σύμμορφη σφαίρα με μηδενισμό των γραμμικών παραμορφώσεων στον ισημερινό, η ακτίνα R_c της σύμμορφης σφαίρας έχει σταθερή τιμή ίση με την τιμή του μεγάλου ημιάξονα του ΕΕΠ (R_c=a).

Στο μετασχηματισμό της επιφάνειας του ΕΕΠ σε σύμμορφη σφαίρα με μηδενισμό των γραμμικών παραμορφώσεων στον κεντρικό μεσημβρινό η ακτίνα R_c της σύμμορφης σφαίρας δεν είναι σταθερή αλλά εξαρτάται από το γεωγραφικό πλάτος και το γεωγραφικό μήκος του κεντρικού σημείου.

Στο μετασχηματισμό που εξασφαλίζει μηδενισμό των γραμμικών παραμορφώσεων στο βασικό παράλληλο η ακτίνα R_c της σύμμορφης σφαίρας δεν είναι σταθερή αλλά εξαρτάται από το γεωγραφικό πλάτος του βασικού παραλλήλου.

Για το σκοπό της εκτελεσθείσας έρευνας επιλέχτηκε για αξιολόγηση ο μετασχηματισμός που εξασφαλίζει μηδενισμό των γραμμικών παραμορφώσεων στον ισημερινό επειδή: i) στο μετασχηματισμό αυτό χρησιμοποιείται σύμμορφη σφαίρα σταθερής ακτίνας, ii) οι δημιουργουμένες γραμμικές παραμορφώσεις κατά μήκος των μεσημβρινών είναι πρακτικά αμελητέες για τις εφαρμογές χαρτογραφικής απεικόνισης σε περιβάλλον ΣΓΠ (GIS) [Παλληκάρης 2010].

Με την εφαρμογή της συνθήκης συμμορφίας (h=k), στο μετασχηματισμό της επιφάνειας του ΕΕΠ σε σύμμορφη σφαίρα με μηδενική γραμμική παραμόρφωση στον ισημερινό, προκύπτουν οι (23) έως (30), οι οποίες δίνουν τους συντελεστές A_2, A_4, A_6, A_8, B_2, B_4, B_6 και B_8 των συναρτήσεων μετασχηματισμού (4) και (6) [Yang, Snyder and Tobler 2000].

$$A_2 = \frac{1}{2}e^2 + \frac{5}{24}e^4 + \frac{3}{32}e^6 + \frac{1399}{53760}e^8 \tag{23}$$

$$A_4 = -\left(\frac{5}{48}e^4 + \frac{7}{80}e^6 + \frac{689}{17920}e^8\right) \tag{24}$$